ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2024-2025

TD 3 : Actions de groupes et théorèmes de Sylow

Les exercices marqués d'un canard seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercices importants

Exercice 1.

Soit G un groupe infini possédant un sous-groupe strict d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 2. (Nombre de sous-espaces vectoriels)

Soient K un corps fini de cardinal q, et $m \leqslant n$ deux entiers. Notons X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de K^n.

En étudiant l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur X, calculer le nombre de sous-espaces vectoriel de dimension m de K^n.

Exercice 3.

Soit G un groupe fini.

1. Soit p un nombre premier divise l'ordre de G et soit S un p-Sylow de G. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- **(a)** S est l'unique p-Sylow de G ;
- **(b)** S est distingué dans G ;
- **(c)** S est stable par tout automorphisme de G (on dit alors que S est un *sous-groupe caractéristique* de G).

2. On va généraliser ce résultat à d'autres groupes que les p-Sylow. Soit k un entier divisant $\#G$ et tel que k est premier à $\frac{\#G}{k}$. On pose X_k l'ensemble des sous-groupes $H \leqslant G$ d'ordre k.

- **(a)** Montrer que si X_k contient un unique sous-groupe H, alors H est caractéristique (et donc distingué).
- **(b)** Montrer réciproquement que si $H \in X_k$ est distingué, alors $X_k = \{H\}$ (*On pourra considérer la projection $\pi : H' \to G/H$ où H' est un élément de X_k*).

Exercice 4. (Groupes d'ordre pq)

1. Soit G un groupe d'ordre 15.

- **(a)** Compter le nombre de 3-Sylow et le nombre de 5-Sylow de G.
- **(b)** En déduire que G est forcément cyclique.

2. Plus généralement, soit G un groupe d'ordre pq avec p et q premiers et $p < q$.

- **(a)** On suppose que $q \not\equiv 1 \pmod p$. Démontrer que G est cyclique.
- **(b)** Exhiber des nombres premiers p et q et un groupe G d'ordre pq non abélien.

Exercice 5. (Théorèmes de Sylow et simplicité des groupes)

Soit G un groupe.

1. **(a)** Montrer que si $\#G = 20$, alors G n'est pas simple.

(b) Plus généralement, montrer que si $\#G = p^a k$ avec p premier, k un entier non divisible par p, $1 < k < p$ alors G n'est pas simple.

2. Montrer que si $\#G = 40$, alors G n'est pas simple (fonctionne aussi avec $\#G = 45$).

3. En faisant agir G par conjugaison sur l'ensemble de ses p-Sylow pour un p bien choisi, montrer que si $\#G = 48$, alors G n'est pas simple (fonctionne aussi avec $\#G = 12$, 24, ou 36).

4. (*Plus difficile*) Montrer que si $\#G = 30$ ou 56, alors G n'est pas simple.

5. Conclure qu'un groupe simple de cardinal non premier est d'ordre au moins 60.

Exercice 6.

Soit G un groupe fini simple d'ordre supérieur ou égal à 3.

1. Soit H un sous-groupe strict de G. Montrer qu'il existe un morphisme injectif

$$\varphi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G/H),$$

et donc que $\#G \mid [G : H]!$ (*Indication : faire agir G sur G/H*).

2. Montrer que $\varphi(G) \subset \mathfrak{A}(G/H)$ et donc que $\#G \mid \frac{1}{2}[G : H]!$.

3. Soit p un nombre premier divisant $\#G$. On note n_p le nombre de p-Sylow de G.

(a) Montrer qu'il existe un morphisme injectif

$$\varphi_p : G \hookrightarrow \mathfrak{A}_{n_p}$$

et donc que $\#G \mid \frac{n_p!}{2}$.

(b) En déduire qu'un groupe d'ordre 80 ou 112 n'est pas simple.

Exercice 7.

Soient G un groupe et soient H et K des sous-groupes d'un groupe G.

1. Si on a $K \lhd H \lhd G$, a-t-on nécessairement $K \lhd G$?

2. On dit qu'un sous-groupe K est *un sous-groupe caractéristique* de G s'il est stable par tout automorphisme de G, i.e. tel que pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\phi(K) \subset K$.

Montrer que si K est caractéristique dans H, et H distingué dans G, alors K est distingué dans G.

3. Soit S un sous-groupe de Sylow de H. Montrer que si S est distingué dans H, et H distingué dans G, alors S est distingué dans G.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. (Sylow et dénombrement)
Soit G un groupe fini d'ordre n.

1. Soit p un facteur premier de n tel que p^2 ne divise pas n. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que G contient $n_p(p-1)$ éléments d'ordre p.

2. Soit p un facteur premier de n de valuation $v_p \geqslant 2$. On suppose que G a au moins 2 p-Sylow. Montrer que G contient au moins p^{v_p} éléments non triviaux d'ordre une puissance de p.

3. Applications :

   (a) Soient $p < q$ deux nombres premiers. Montrer que les groupes d'ordre p^2q ne sont jamais simple.

   (b) Soient $p < q < r$ trois nombres premiers. Montrer que les groupes d'order pqr ne sont jamais simples.

Exercice 9. (Sylow d'un sous-groupe)
Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et p un nombre premier divisant l'ordre de H.

1. On considère S, S' deux p-Sylow de H et on suppose qu'il existe un p-Sylow T de G tel que S, $S' \subset T$.

   (a) Montrer que $\langle S, S' \rangle$ est un p-groupe.

   (b) En déduire que $S = S'$.

   (c) Conclure que le nombre de p-Sylow de H est inférieur ou égal au nombre de p-Sylow de G.

2. On suppose maintenant que H est distingué dans G. Montrer que pour tout p-Sylow T de G, le groupe $T \cap H$ est un p-Sylow de H et que tous les p-Sylow de H sont de cette forme.

Exercice 10. (Sylow d'un quotient)
Soient G un groupe fini, N un sous-groupe distingué de G et p un nombre premier divisant l'ordre de G/N.

1. Soit S un p-Sylow de G. On considère l'ensemble $SN = \{sn, s \in S, n \in N\}$. On rappelle que c'est un sous-groupe de G car N est un sous-groupe distingué.

   (a) Montrer que SN/N est p-groupe.

   (b) Montrer que $[G/N : SN/N] = \frac{[G:S]}{[SN:S]}$ et en déduire que SN/N est un p-Sylow de G/N.

2. On va montrer réciproquement que tous les p-Sylow de G/N sont de la forme précédente. Soit $\overline{S}$ un p-Sylow de G/N. On pose $H = \pi^{-1}(\overline{S})$ où $\pi : G \to G/N$ est la projection canonique.

   (a) Exprimer l'ordre de H en fonction de l'ordre de $\overline{S}$ et de N.

   (b) En déduire que les p-Sylow de H sont des p-Sylow de G.

   (c) Soit S un p-Sylow de H. Déduire de ce qui précède que $\overline{S} = SN/N$.

3. En déduire que le nombre de p-Sylow de G/N est inférieur ou égal au nombre de p-Sylow de G.